

S4 - Savoir-faire à Développer pour le Test de Contrôle de la 1e Période (S4)

Le test portera sur les trois Unités d'Apprentissage (UA) étudiées durant les sept premières semaines².

1. UA Nombres et Calculs (Pour les Séries MP et SVT, les séries SES et LLA ne seront pas évaluées sur ce block d'apprentissage)

L'élève doit maîtriser les concepts fondamentaux de la théorie des nombres :

- **Divisibilité et Division Euclidienne :**
 - Utiliser les propriétés de la **divisibilité dans \mathbb{Z}** ³.
 - Effectuer une **division euclidienne** et interpréter son résultat⁴.
- **Congruences :**
 - Manipuler et utiliser les propriétés des **congruences dans \mathbb{Z}** (somme, produit, puissance)⁵.
 - Déterminer des **restes** ou des **chiffres d'unité** à l'aide des congruences⁶.
- **PGCD et Nombres Premiers :**
 - Déterminer le **PGCD** (Plus Grand Commun Diviseur) de deux entiers, notamment en utilisant l'**Algorithme d'Euclide**⁷.
 - Appliquer l'**Identité de Bézout**⁸.
 - Résoudre des **équations diophantiennes** de la forme $ax + by = c$ ⁹.
 - Utiliser la **décomposition en facteurs premiers**¹⁰.

2. UA Fonctions : Limites et Continuité (Pour toutes les séries)

L'élève doit comprendre et calculer les limites, et appliquer la notion de continuité :

- **Limites de Suites :**
 - **Démontrer par récurrence** certaines propriétés de suites¹¹.
 - Calculer la limite d'une suite, en particulier les **suites géométriques**¹².
 - Appliquer les **théorèmes de comparaison** (encadrement, gendarmes)¹³.
 - Effectuer des **opérations** sur les limites¹⁴.
- **Limites et Continuité des Fonctions :**
 - Calculer les limites de fonctions, y compris aux bornes du domaine de définition¹⁵.
 - Identifier et lever les **formes indéterminées**¹⁶.
 - Déterminer les **asymptotes** (verticales, horizontales, obliques) de la courbe d'une fonction¹⁷.
 - Vérifier la **continuité** d'une fonction sur un intervalle¹⁸.

- Utiliser le **théorème des valeurs intermédiaires** et l'algorithme de **dichotomie** pour l'encadrement des racines¹⁹.

3. UA Fonctions : Exponentielle et Logarithme

L'élève doit maîtriser les fonctions transcendantes Exp et ln

- **Définitions et Propriétés :**

- Connaître les **définitions** et les **propriétés algébriques** des fonctions exponentielle.
- Étudier les **limites** de ces fonctions²¹.
- Calculer leurs **dérivées**²².
- **Représenter** graphiquement leurs courbes et leurs tangentes²³.

- **Résolution :**

- **Résoudre** des **équations** et **inéquations** impliquant exp et ln
- **Modéliser** des situations concrètes (croissance/décroissance) à l'aide de ces fonctions²⁵.



Modèle d'Examen Type Approche par Compétences (Période 1)

Durée : 2 heures

Barème Total : 60 points (Exemple)



Compétences Évaluées

1. **Résoudre une situation-problème** (Mobiliser les savoirs dans un contexte complexe)
2. **Déployer un raisonnement mathématique** (Démontrer, Justifier, Analyser)

Partie A : Situation Problème - La Croissance des Bactéries et l'Inventaire

(Exercice 1 – Pour toutes les séries - Exercice 2 : MP et SVT)

(25 points) Une situation-problème qui exige de mobiliser à la fois l'arithmétique et les fonctions.

Contexte : Une souche de bactéries a une population modélisée par $P(t) = 1000 \cdot e^{0.2t}$, où t est le temps en heures. Parallèlement, pour les expériences, un laborantin doit préparer des boîtes de Pétri. Il a besoin d'un nombre de plaques qui doit être congru à 1 (mod 5) et à 3 (mod 7).

1. Modélisation Biologique (Fonctions)

- a. À l'aide de la dérivée, prouvez que la population bactérienne est toujours croissante. **(5 pts)**
- b. Au bout de combien de temps la population atteindra-t-elle le seuil critique de 5000 individus ? (Utilisez \ln) **(5 pts)**
- c. L'équipe veut savoir quand le taux de croissance (pente de la tangente) atteint 300 individus/heure. Déterminez t à cet instant. **(5 pts)**

2. Inventaire (Nombres et Calculs)

- a. Le nombre de plaques N doit satisfaire le système de congruences :

$$N \equiv 1 \pmod{5}$$

$$N \equiv 3 \pmod{7}$$

Déterminez la plus petite valeur positive possible pour N . **(5 pts)**

- b. Un fournisseur livre un stock de 94 plaques, et le laborantin doit les répartir entièrement en piles de même hauteur d . Quelle est la valeur maximale de d si d doit aussi diviser 2023 ? (Recherche du PGCD). **(5 pts)**

Partie B : Évaluation des Savoirs et du Raisonnement (35 points)

I. Questions à Choix Multiples (QCM) - (10 points)

Une seule réponse est correcte. Toute erreur annule le point.

- Congruence :** Quel est le reste de la division euclidienne de 2^{2025} par 5 (**MP et SVT**) ?
 - a) 0
 - b) 1
 - c) 2
 - d) 3

2. **Limite de Suite :** La suite (u_n) définie par $u_n = 5 - \frac{3}{n}$ pour $n \geq 1$ converge vers :

- a) 0
- b) 2
- c) 5
- d) $+\infty$

3. **Logarithme :** La solution de l'équation $\ln(2x - 1) = 0$ est :

- a) $x = 0$
- b) $x = 1$
- c) $x = \frac{1}{2}$
- d) $x = e$

4. **Dérivée :** La dérivée de la fonction $f(x) = x \cdot e^{3x}$ est :

- a) $f'(x) = e^{3x}$
- b) $f'(x) = (1 + 3x)e^{3x}$
- c) $f'(x) = 3e^{3x}$
- d) $f'(x) = x^2 e^{3x}$

Et 6 autres questions de ce type

II. Exercices d'Application et de Raisonnement - (25 points)

II. Exercices d'Application et de Raisonnement - (25 points)

Exercice 1 : Arithmétique (10 points)

1. **Démontrez** l'Identité de Bézout pour les nombres $a = 52$ et $b = 15$: trouvez un couple d'entiers (u, v) tel que $52u + 15v = \text{PGCD}(52, 15)$. **(5 pts)**
2. Soit n un entier naturel. **Prouvez par récurrence** que $3^{2n} - 1$ est toujours divisible par 8. **(5 pts)**

Exercice 2 : Étude de Fonction (15 points)

Soit la fonction $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

1. Déterminez le **domaine de définition** \mathcal{D}_f de $f(x)$. **(2 pts)**
2. Calculez les **limites** de $f(x)$ aux bornes de son domaine de définition \mathcal{D}_f . Interprétez graphiquement le résultat. **(5 pts)**
3. Calculez la **dérivée** $f'(x)$. **(5 pts)**
4. Déduisez-en le **tableau de variation** complet de $f(x)$. **(3 pts)**

 Sources

L'exercice 1 de cette partie concerne uniquement les élèves de MP et de SVT

Minimum vital : Formules Clés et Exercices Simples - Mathématiques S4

Unité d'Apprentissage (UA)	Thème	Formules Clés	Exercice d'Application Simple
Nombres et Calculs Séries MP et SVT	Division et Congruences		$a \equiv b \pmod{n} \iff a - b \text{ est un multiple de } n.$ 1. Congruence : Quel est le reste de la division euclidienne de 13^2 par 5
	PGCD et Bézout	L'Algorithme d'Euclide permet de trouver $\text{PGCD}(a, b)$. L'Identité de Bézout : $\text{PGCD}(a, b) = au + bv$ pour $u, v \in \mathbb{Z}$.	2. PGCD : Calculez $\text{PGCD}(84, 30)$ par l'Algorithme d'Euclide.
Fonctions	Limites de Suites Géométriques	Si $u_n = q^n$ Si $-1 < q < 1$ alors ...	Déduire la convergence d'une suite
	Limites de Fonctions	En $\pm\infty$, pour une fonction rationnelle, la limite est celle du quotient des termes de plus haut degré.	4. Limite : Calculez $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x}{x^2 + 1}$.
	Continuité		f est continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. 5. Continuité : Soit $f(x) = x^2 + k$. Trouvez k pour que $f(x)$ soit continue en $x=1$ si $f(1)=3$.
Fonctions	Fonction Exponentielle e^x		Dérivée : $(e^u)' = u'e^u$. Propriété : $e^{a+b} = e^a e^b$. 6. Equation Exp : Résolvez l'équation $e^{2x} = e^{x+3}$.
	Fonction Logarithme $\ln x$		Dérivée : $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$. Propriété : $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$. 7. Dérivée Log : Calculez la dérivée de $f(x) = \ln(5x + 2)$.